Отчет 2013 года

Талалаева Д.В. о работе в рамках проекта

Высшие гомотопические алгебры Ли в задачах классификации квантовых интегрируемых систем.

1 Введение

План исследования предполагал развитие двух направлений:

- Исследование двумерных квантовых интегрируемых систем и связанных с ними алгебраических структур. Центральное место в вопросе отводится уравнению тетраэдров, его алгебраической и геометрической интерпретации и методам построения его решений.

- Построение аппарата деформационного квантования в контексте интегрируемых систем, то есть применение техники деформации для алгебр с оснащением в виде коммутативной подалгебры. Задача предполагает анализ когомологических препятствий, а также конструкцию эффективного квантования пары.

2 Решения уравнения тетраэдров и инварианты 2-узлов

Ранее мной были получены результаты связывающие понятие Ли-биалгебры с уравнением тетраэдра, а именно было установлено, что по любой Ли-биалгебре можно построить решение данного уравнения.

Центральным в работах этого годы было широкое исследование роли уравнения тетраэдров в геометрии, топологии и математической физике. Оказалось, что родственные структуры - классы 3-когомологий квандлов используются в задаче построения инвариантов 2-узлов, то есть классов изотопий отображений 2-сферы в $\mathbb{R}^4$. Этому посвящен ряд работ [1]. Целью моей деятельности было построение аналога конструкции Тураева-Решетихина для 2-узлов с использованием специальных решений уравнения тетраэдров.

Для этого была рассмотрена категория 2-связок $\mathcal{T}an_2$, объектами которой являются зацепления в $\mathbb{R}^3$, а морфизмами - классы изотопий общего положения вложений двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3 \times [0,1]$, образ границ которых совпадает с парой зацеплений, лежащих в $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ и $\mathbb{R}^3 \times \{1\}$.

Данный подход отличается от основной идеи работы [2], в которой строится 2-категория 2-связок. Наша категория является ограничением 2-категории 2-связок на тривиальное множество объектов со сдвигом градуировки.

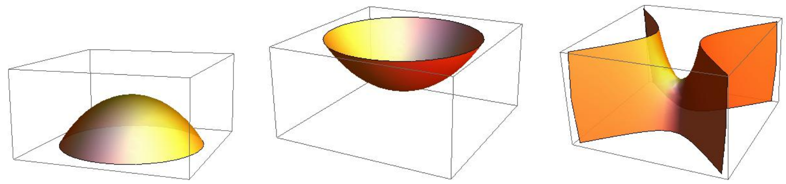

Рис. 1: Перестройки

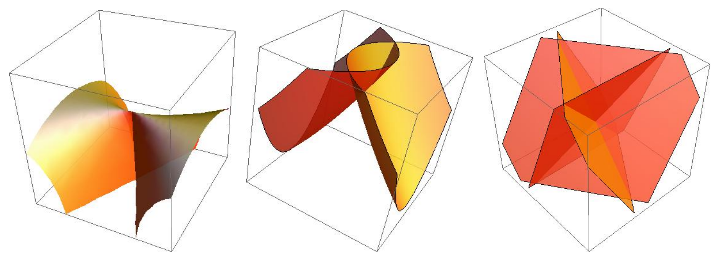

Рис. 2: Движения Рейдемейстера

Ключевым для построения инварианта является рассмотрение категории диаграмм 2-связок $\mathcal{D}iag_2$. Полугруппа морфизмов этой категории порождена двумя наборами элементарных морфизмов: перестройками, меняющими топологию узла (Рис. 1), и движениями Рейдемейстера 1-узлов (Рис. 2).

Соотношения задаются набором движений Розмана [3]. На рисунках 3, 4, 5, 6 представлены некоторые из них.

В основе конструкции инвариантов 2-узлов находится гипотетический функтор из данной категории в категорию векторных пространств

$$\chi : \mathcal{D}iag_2 \to \mathcal{V}ect. \tag{1}$$

Значение функтора на 2-узле является скаляром, зависящим от параметров конструкции.

Подход с помощью представлений фундаментального квандла [1] использует комбинаторную конструкцию инварианта, оперирующую с листами диаграммы, то есть с областями, на которые диаграмма разрезается графом двойных точек.

Здесь предлагается альтернативная конструкция, в которой положение статистической системы характеризуется состоянием ребра графа двойных точек, хотя сама система зависит от порядка прохождения листов. Введем некоторые обозначения:

E – множество ребер графа двойных точек

T – множество тройных точек

B – множество точек ветвления

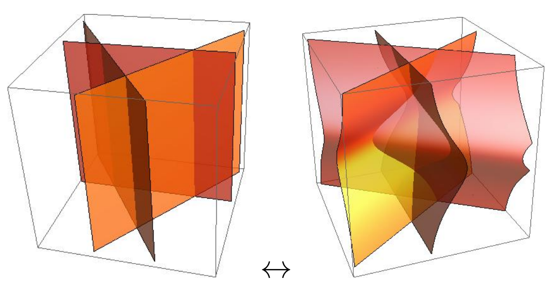

Рис. 3: Движение Розмана типа 3

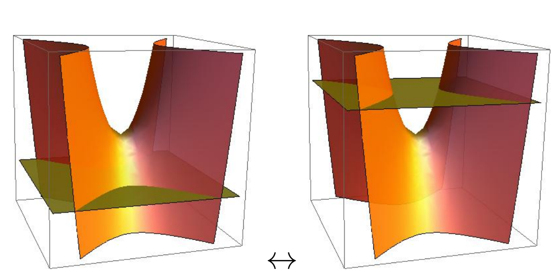

Рис. 4: Движение Розмана типа 4

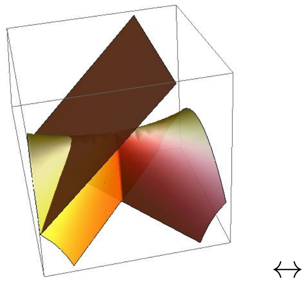

Рис. 5: Движение Розмана типа 6

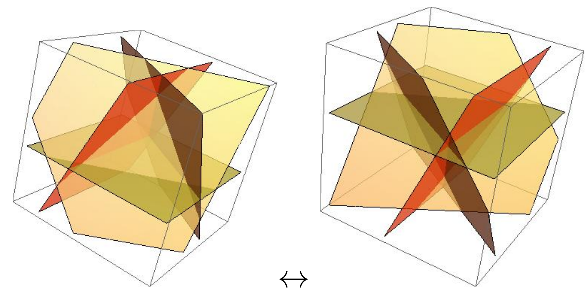

Рис. 6: Движение Розмана типа 7

Конструкцию можно представить в виде следующих шагов:

- Введем ориентацию диаграммы, которая является поверхностью в $\mathbb{R}^3$ с самопересечениями. Она индуцирует ориентацию ребер графа двойных точек. Ориентация линии пересечения двух листов выбирается так, чтобы направляющий вектор вместе с нормалями двух листов в порядке их расположения составляли положительную тройку в $\mathbb{R}^3$. Также введем индексацию ребер, то есть сопоставим каждому ребру индекс, принимающий значения в $\mathbb{Z}$.

- Сопоставим каждой тройной точке решение уравнения тетраэдров Φ^{lmn}_{ijk} с индексами, определенными таким образом, что индексы i, j, k соответствуют входящим ребрам, а l, m, n - исходящим, кроме этого их порядок должен соответствовать порядку листов диаграммы, то есть ребра i, j и k являются пересечениями листов (J, K), (K, I) и (I, J) соответственно, причем лист I самый верхний, а лист K самый нижний.

- Сопоставим точкам ветвления вектор $v = \{v^i\}$, если ребро является входящим (обозначим множество таких точек ветвления как B_+), и ковектор $v^\dagger = \{v_j\}$ - если исходящим (такие точки отнесем к B_-).

- Собственно статсумма строится следующим образом:

$$\chi = \sum_{i_1,\dots,i_n} \prod_{\alpha\in T} \Phi^{l^\alpha m^\alpha n^\alpha}_{i^\alpha j^\alpha k^\alpha} \prod_{\beta\in B_+} v^{i^\beta} \prod_{\beta\in B_-} v_{i^\beta}. \tag{2}$$

Лемма 1 *Для того, чтобы χ было инвариантом 2-связок необходимо выполнение перечисленных ниже условий. Введем обозначения: P_{ij} - матрица перестановки в паре i-ой и j-ой тензорных компонент, $A = Tr_2 \Phi P_{12}$.*

- *Уравнение тетраэдра (7-е движение Розмана)*

$$\Phi_{123}\Phi_{145}\Phi_{246}\Phi_{356} = \Phi_{356}\Phi_{246}\Phi_{145}\Phi_{123} \tag{3}$$

- *3-е движение Розмана*

$$\Phi^{t_1}\Phi^{-1^{t_1}} = id; \qquad \Phi^{t_2}\Phi^{-1^{t_2}} = id \tag{4}$$

здесь операция t_i означает сопряжение в i-ой тензорной компоненте.

- *6-е движение Розмана*

$$Av \otimes 1 = v \otimes 1 \tag{5}$$

- *2-е движение Розмана*

$$A_{12}A_{13} = vv^{\dagger} \otimes 1 \otimes 1 \tag{6}$$

Основная работа состояла в разрешении этих условий и поиска подходящих решений уравнения тетраэдров. На настоящий момент получено утверждение

Лемма 2 *Не существует решений уравнения тетраэров, удовлетворяющих условиям леммы 1, в размерности* 2*. В размерности* 3 *выполнение условий 5 и 6 леммы 1 эквивалентно с точностью до замены базиса следующему уравнению*

$$Tr_2 \Phi P_{12} = e_{11} \otimes 1 + e_{23} \otimes B \tag{7}$$

где B - произвольная матрица, e_{ij} - стандартный базис в пространстве матриц.

3 Деформационное квантование интегрируемых систем

В этом году уточнялись результаты [4]. Напомню, что ранее были получены препятствия деформационного квантования интегрируемой системы в следующем контексте: пусть $(M,\ \pi \in T^2(M))$ пуассоново многообразие, кроме этого, предположим, что на M существует интегрируемая система, т.е. коммутативная подалгебра $C \subset \mathcal{A} = C^{\infty}(M)$ размерности половины $dim(M)$, такая что $\{f, g\} = 0$ для $f, g \in C$. Кроме того рассматривается класс пуассоновых пар $C \subset \mathcal{A}$ с базой, то есть таких, в которых $C = p^*(C^{\infty}(X))$ для некоторого отображения $p : M \to X$. Основной вопрос состоит в том, существует ли деформационное квантование пары алгебр $C \subset \mathcal{A}$ т.е. такое $*$- произведение на $\mathcal{A}[[\mathsf{h}]]$ для которого подалгебра $C \subset \mathcal{A}[[\mathsf{h}]]$ остается коммутативной.

Рассмотрим $H^*(\mathbb{C}, \mathcal{A})$ - когомологии относительного комплекса Хохшильда, а также относительные пуассоновы гомологии с дифференциалом d_{π}^{hor}, который получается при ограничении операции $[\pi\,, \cdot]$ на $H^*(\mathbb{C}, \mathcal{A})$. В работе были найдены классы данных пространств когомологий, которые гарантируют выполнение следующего утверждения

Утверждение 1 *Рассмотрим интегрируемую систему $(\mathcal{A},\ \mathbb{C},\ \{,\})$, где алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathbb{C}$ таковы, как сказано выше. Тогда препятсвующие классы $[B_n] \in H^2(\mathbb{C},\ \mathcal{A})$ замкнуты по отношению к d_{π}^{hor} и квантование в смысле последовательного разрешения условия коммутативности существует тогда и только тогда, когда они d_{π}^{hor}-точны.*

Для симплектического пространства данный результат совпадает с полученным ранее в работе [5].

В работах этого года были предприняты попытки расширить результат на более общий случай, нежели случай иммерсии, фигурирующий в условиях теоремы. Однако на настоящий момент положительных результатов не было получено. Также в новой версии препринта [4] этого года рассматривается более общая задача деформации, которую можно назвать эффективной: в ней используется полный деформационный ряд, в отличие от ряда в задаче последовательного приближения. Получены аналогичные алгебраические соотношения, которые могут быть проинтерпретированы. Последняя версия статьи подана на рассмотрение в EMS Journal of noncommutative geometry.

4 План на 2014 год

4.1 $2d$ - интегрируемые системы и топологические инварианты

- В следующем году планируется более полное исследование полученных выше условий и классов решений уравнения тетраэдров, в том числе частных решений [6] и решений, получаемых методом вакуумных кривых [7].

- Планируется обобщение задачи построения функтора, рассмотрения функтора граней, а также обобщение до 2-функтора 2-категории.

- Особого внимания заслуживает поиск аналога конструкции Джонса-Виттена, связывающей инварианты статистической природы с вычислением средних в топологических квантовых теориях поля.

- Также планируется исследование свойств квантовых интегрируемых систем, получаемых по решениям уравнения тетраэдра, фигурирующих в задаче построения инвариантов 2-узлов.

4.2 Деформационное квантование

- В следующем году планирируется обобщение результатов для более универсальных ситуаций коммутативных подалгебр. Будет исследоваться пучковая версия данных построений.

- Значительный интерес представляет исследование данной техники в связи с такими структурами интегрируемых систем, как r-матричные скобки и их квантовые аналоги.

5 Социализация

- Преподавание. Я являюсь штатным научным сотрудником механико-математического факультета. Преподаю дисциплины: аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, линейная алгебра. Веду научно-практические занятия по геометрии для студентов кафедры Высшей геометрии и топологии.

- Программа исследований данного проекта является центром деятельности постоянного семинара в ИТЭФ по некоммутативной геометрии.

- Результаты работ по направлению "Деформационное квантование"докладывались в этом году на международной конференции "Геометрия и квантование"проведенной в Институте Шредингера в Вене в августе 2013 года.

Список литературы

[1] Carter, J.S., Jelsovsky, D., Langford, L., Kamada, S., Saito, M., *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947-3989.

[2] J. E. Fischer, Jr. *2-Categories and 2-knots.* Duke Mathematical Journal, 1994 Vol. **75**, No. 2, pp. 493-596.

[3] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space.* Knot theory, Banach center publications, Vol **42**, Institute of mathematics, Polish academy of sciences. Warszawa 1998.

[4] G. Sharygin, D. Talalaev, *Deformation quantization of integrable systems,* arXiv:1210.2840

[5] M. Garay, D. Van Straten , *Classical and quantum integrability*, arXiv:0802.1647

[6] I. Korepanov, *Tetrahedral Zamolodchikov Algebras Corresponding to Baxter's L-Operators*, Commun. Math. Phys. **154**, 85-97 (1993)

[7] И. М. Кричевер, *Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия,* Функциональный анализ и его приложения, т. **15**, вып. 2, 1981, 22-35.